Dossier n°29 : Exemples d'emploi d'homothéties et de translations pour l'étude de problèmes de constructions géométriques dans le plan.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 5 décembre 2003
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

Les translations sont introduites en quatrième et les vecteurs en troisième.

Les homothéties sont définies en Première S et font l'objet d'un chapitre d'étude, associées aux translations dans cette classe.

Je choisis donc de situer ce dossier en Première S.

II Commentaires généraux.

II.1 A propos du sujet.

On définit les translations en quatrième et les homothéties en Première S de la façon suivante :

Définition 1 :

Soient A et B deux points et un point M.

L'image du point M par la translation qui transforme A en B est le point N tel que ABNM est un parallélogramme (aplati si les points A, B et M sont alignés).

Définition 2 :

Soit O un point du plan et k un réel non nul. On **appelle homothétie de centre O et de rapport k** l'application du plan dans lui-même qui à chaque point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$$

En particulier, les translations sont des isométries et les homothéties des similitudes.

De plus, la construction d'un point image par de telles applications utilise le plus souvent des droites parallèles d'après leurs propriétés.

L'objectif de ce dossier est donc de présenter des constructions géométriques utilisant les propriétés des homothéties et des translations.

II.2 A propos des exercices.

J'ai donc choisi pour illustrer dans ce dossier de vous présenter cinq exercices :

- les exercices 1et 2 proposent la construction de deux points à l'aide des translations, mais vérifiant des conditions différentes ;
- l'exercice 3 propose la construction d'un carré inscrit dans un triangle à l'aide d'homothéties ;
- l'exercice 4 propose la construction d'un triangle dont on connaît les milieux des côtés à l'aide d'homothéties ;
- l'exercice 5 propose la construction de cercles à l'aide d'homothéties.

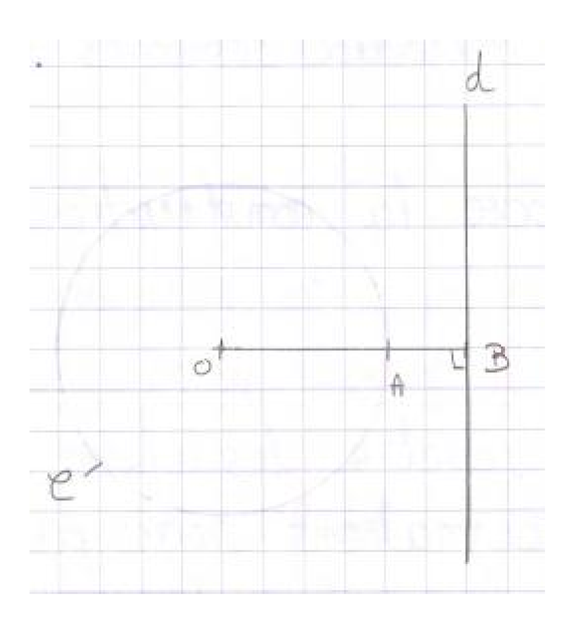
Pour les exercices 3 et 4, les élèves sont guidés quant au choix des transformations mais pas dans les exercices 1, 2 et 5. Toutefois, dans le cas des translations, la présence de parallélogrammes ou de droites parallèles permet « d'intuiter » l'utilisation de telles transformations.

Une majorité des exercices de construction géométrique se résolvent par la méthode d'analyse/synthèse, dont je vous rappelle le principe :

- *Analyse* : on suppose que le problème admet une solution satisfaisant la condition (figure pour une construction géométrique) et on exploite la solution pour déterminer des propriétés de la figure. Le raisonnement effectué au cours de cette étape est un raisonnement par condition nécessaire.
- *Synthèse* : on construit la figure grâce aux propriétés dégagées au cours de l'analyse. Au cours de cette seconde étape, on peut être conduit à bâtir une discussion ou à rejeter certains objets déterminés lors de la première étape.

III Présentation des exercices.

III.1 Exercice n°1.



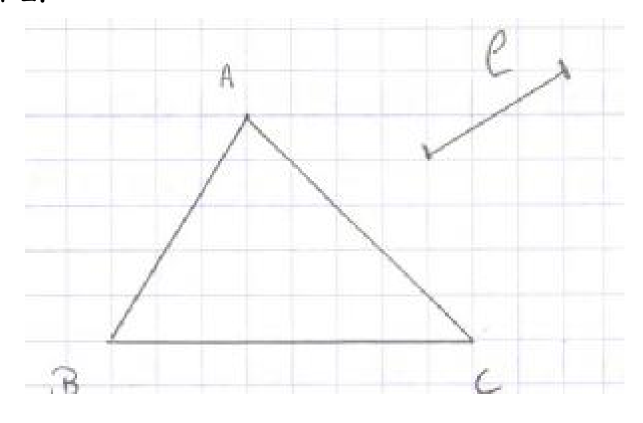
But : Construire un point M de d et un point N de $\mathcal{C}$ tels que OAMN soit un parallélogramme.

Méthode : Lorsque la figure est faite, N est l'image de M par la translation de vecteur fixe $\overrightarrow{AO}$.

Outils :

- *Proposition 3 :*
  Par une homothétie ou une translation, l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.
- Définition 1.

III.2 Exercice n°2.



But : Construire un point P sur (AB) et un point Q sur (AC) tels que PQ = l et (PQ) // (BC).

Méthode : $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ de norme l (deux possibilités).

Outils :

- Proposition 3 ;
- Définition 1.

III.3 Exercice n°3.

But : Construire un carré IJKL intérieur au triangle ABC tel que I, J $\in$ [BC], K $\in$ [AC] et L $\in$ [AB].

Méthode : Considérer l'homothétie de centre A qui transforme L en B (en remarquant la présence de triangles homothétiques).

Outils :

- Proposition 4 :

ABC et AMN sont deux triangles tels que M est un point de (AB), N est un point de (AC) et la droite (MN) est parallèle à la droite (AC).

L'homothétie de centre A qui transforme B en M transforme C en N.

- Proposition 3
- Proposition 5 :

Lorsque deux droites d et Δ sont parallèles, leurs images d' et Δ' par une homothétie h sont aussi des droites parallèles.

III.4 Exercice n°4.

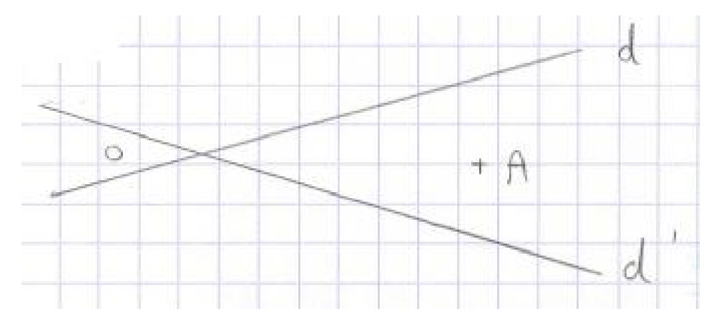
But : A', B' et C' étant donnés, construire un triangle ABC tel que A' est le milieu de [AB], B' celui de [AC] et C' celui de [AB].

Méthode : Considérer l'homothétie de centre G (centre de gravité des deux triangles) et de rapport -2.

Outils :

- Définition 2 ;
- Position du centre de gravité sur les médianes d'un triangle.
- L'homothétie est une bijection.

III.5 Exercice n°5.



But : Construire un cercle $\mathcal{C}$ tangent à d et d' passant par A.

Méthode : Construire un cercle $\mathcal{C}$ ' tangent à d et d'. La droite (OA) le coupe en I et J. Le cercle $\mathcal{C}$ est l'image de $\mathcal{C}'$ par l'homothétie de centre O qui transforme I ou J en A.

Outils :

- Proposition 3 ;
- Proposition 6 :

L'image d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre **I** et de rayon r par une homothétie de rapport k est le cercle $\mathcal{C}'$ de centre **I**' = h(**I**) et de rayon r' = $|k|$ r.

IV Enoncés et références des exercices.

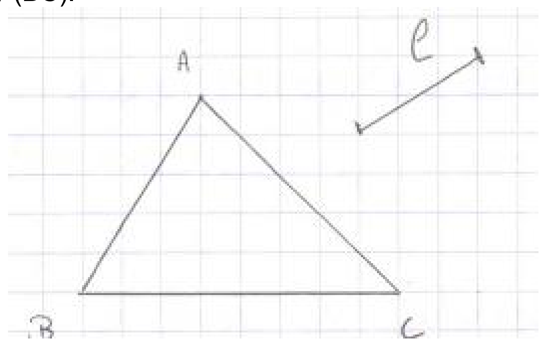
IV.1 Exercice n°1 (TD4-2 p 398, Transmath 1ère S 2001).

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O, A est un point de ce cercle et B est le point tel que $\overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$. On note d la perpendiculaire à (OA) menée par B.

Construire un point M sur d et un point N sur $\mathcal{C}$ de sorte que le quadrilatère OAMN soit un parallélogramme.

IV.2 Exercice n°2 (n°68 p 162, Terracher 1ère S 2001).

Etant donné un triangle ABC et une longueur l, construire sur (AB) un point P et sur (AC) un point Q tels que PQ = l et (PQ) // (BC).



IV.3 Exercice n°3 (TD4-3 p 398, Transmath 1ère S 2001).

ABC est un triangle acutangle, c'est à dire yb triangle dont les trois angles sont aigus. On souhaite construire un carré IJKL, intérieur au triangle tel que I et J sont des points de [BC], K est un point de [AC] et L est un point de [AB].

1. On suppose le carré IJKL construit. Soit h l'homothétie de centre A qui transforme L en B.
   a) Quelle est l'image de K ? Celle de I et J ?
   b) En déduire BEDC, image du carré LIJK par h.
2. Revenons au triangle acutangle ABC.
   a) Faire une figure et construire le carré BEDC pour lequel les points A et D sont de part et d'autre de la droite (BC).
   b) La droite (AE) coupe [BC] en I et la droite (AD) coupe (BC) en J. La perpendiculaire en I à (BC) coupe (AB) en L et la perpendiculaire en J à (BC) coupe (AC) en K. Justifier que IJKL est un carré qui répond au problème.

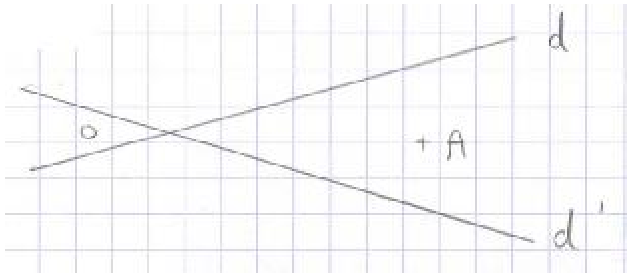
IV.4 Exercice n°4 (n°93 p 411, Transmath 1ère S 2001).

On donne trois points A', B' et C' non alignés. Le but de l'exercice est de construire un triangle AC tel que A' est le milieu de [BC], B' celui de [AC] et C' celui de [AB].

1. On suppose la figure faite.
   a) Pourquoi A'B'C' et ABC ont-ils le même centre de gravité G ?
   b) Pourquoi A est-il l'image de A' par l'homothétie h de centre G de rapport -2 ? Préciser h(B') et h(C').
2. Construire un triangle A'B'C'.
   a) Indiquer comment construire un triangle ABC satisfaisant aux conditions exigées par l'énoncé (justifier que le triangle obtenu satisfait effectivement à ces conditions).
   b) Combien y-a-t-il de triangles possibles ?

IV.5 Exercice n°5 (n°97 p 412, transmath 1ère S 2001)

Deux droites d et d' sont sécantes en O, A est un point disposé comme l'indique la figure ci-dessous.



Construire un triangle C passant par A et tangent à d et d'. Combien y-a-t-il de solutions ?

Indication : Construire un cercle quelconque tangent à d et d'.